29/5/2017

Ομομορφισμοί δακτυλίων

Ορισμός: Αν R, R' είναι δυο δακτύλιοι τότε ένας ομομορφισμός δακτυλίων $\varphi: R \to R'$ είναι μια απεικόνιση φ έτσι ώστε: (1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\forall x, y \in R$

(2) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, $\forall x, y \in R$

(3) $\varphi(1_R) = 1_{R'}$

Αν οι δακτύλιοι δεν έχουν μονάδα τότε μια απεικόνιση φ που ικανοποιεί τα (1) και (2) θα καλείται ομομορφισμός δακτυλίων χωρίς μονάδα

Παρατήρηση: Αν $\varphi: R \to R'$ ομομορφισμός δακτυλίων, τότε η ιδιότητα (1) λέει ότι φ ομομορφισμός των αβελιανών ομάδων $(R,+)$, $(R',+)$

Παράδειγμα: (1) Για κάθε δακτύλιο R, η ταυτοτική απεικόνιση $I_{d_R}: R \to R$, $I_{d_R}(r) = r$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων

(2) Για κάθε $n \geq 1$, η απεικόνιση $\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ με $\pi(k) = [k]_n$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

Πράγματι, (i) $\pi(\kappa+\lambda) = [\kappa+\lambda]_n = [\kappa]_n + [\lambda] = \pi(\kappa)+\pi(\lambda)$

(ii) $\pi(\kappa\cdot\lambda) = [\kappa\cdot\lambda]_n = [\kappa]_n\cdot[\lambda]_n = \pi(\kappa)\cdot\pi(\lambda)$

(iii) $\pi(1) = [1]_n$

(3) Θεωρούμε τον δακτύλιο $F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi: \text{απεικόνιση} \}$

Θεωρούμε $a \in \mathbb{R}$ και την απεικόνιση $\Phi_a : F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

και $\Phi_a(\varphi) = \varphi(a)$. Τότε η Φ_a: ομομορφισμός δακτυλίων

(4) Έστω R: μεταθετικός δακτύλιος και έστω $R[t]$

ο δακτύλιος πολυωνύμων με στοιχεία από το R. Για

κάθε $r \in R$, ορίζουμε απεικόνιση: $\Phi_r : R[t] \to R$, $P(t) \mapsto \Phi_r(P(t)) = P(r)$

όπου αν: $P(t) = a_0 1_R + a_1 t + \dots + a_n t^n$ τότε:

$P(r) = a_0 1_R + a_1 r + \dots + a_n r^n$. Τότε η απεικόνιση

Φ_r είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων

Αν $\varphi: R \to R'$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων

τότε : • $\varphi(0_R) = 0_{R'}$ (αφού φ: ομομορφισμός ομάδων)

• $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

• $\varphi(x-y) = \varphi(x) - \varphi(y)$

• $\varphi(x^n) = \varphi(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ φορές}}) = \underbrace{\varphi(x) \cdot \varphi(x) \cdot \ldots \cdot \varphi(x)}_{n \text{ φορές}} = (\varphi(x))^n$, $\forall n \geq 0$

Η απεικόνιση $\varphi: U(R) \to U(R')$ $r \mapsto \varphi(r)$ είναι καλά ορισμένη και είναι ομομορφισμός ομάδων

Έστω $r \in U(R) \Rightarrow \exists r' \in R: r \cdot r' = 1_R = r' \cdot r$

$\xrightarrow{\varphi: \text{ομομορφισμός}} \varphi(r \cdot r') = \varphi(1_R) = \varphi(r' \cdot r)$

$\Rightarrow \varphi(r) \cdot \varphi(r') = 1_{R'} = \varphi(r') \cdot \varphi(r)$

$\Rightarrow \varphi(r) \in U(R') \Rightarrow \varphi$: καλά ορισμένη και είναι ομομορφισμός ομάδων διότι $\varphi(r \cdot s) = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$

Scanned by CamScanner

Παράδειγμα: Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$

τότε $\varphi(n) = 2n$. Τότε η φ είναι ισομορφισμός

προσθετικών ομάδων. ~~Θράδων~~ όμως $\varphi(k \cdot \lambda) = 2k \cdot \lambda$

Αλλά $\varphi(k) \cdot \varphi(\lambda) = 2k \cdot 2\lambda = 4k\lambda \Rightarrow \varphi$: δεν είναι ομομορφισμός δακτυλίων (χωρίς μονάδα)

Έστω R: δακτύλιος (με μονάδα 1_R)

R': (δακτύλιος χωρίς μονάδα)

Τότε αν $\varphi: R \to R'$ ώστε: (i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(ii) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

(iii) φ: επί

Τότε θα δείξουμε ότι ο R' έχει μονάδα και η φ: ομομορφισμός δακτυλίων

Απόδειξη: $\forall r \in R$: $\varphi(r) = \varphi(r \cdot 1) = \varphi(r) \cdot \varphi(1_R)$

όμως $\varphi(r) = \varphi(1_R \cdot r) = \varphi(1_R) \cdot \varphi(r)$

Όμως αφού φ: επί τότε $\forall a \in R'$ αυτό θα είναι της μορφής $a = \varphi(r)$, για κάποιο $r \in R$ και άρα τότε

$\forall a \in R'$: $a \cdot \varphi(1_R) = a = \varphi(1_R) \cdot a \Rightarrow \varphi(1_R) = 1_{R'}$

μονάδα στον R'

Πρόταση: Έστω $\varphi: R \to R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων

1) Αν S: υποδακτύλιος του $R \Rightarrow \varphi(S)$ υποδακτύλιος του R'

(2) Αν S': υποδακτύλιος του $R' \Rightarrow \varphi^{-1}(S)$ υποδακτύλιος του R

• Ιδιαίτερα αν $S = R$, τότε $\varphi(R) = Im(\varphi)$: υποδακτύλιος του R'

• Αν τώρα $S' = \{0\} \subseteq R'$ και άρα: $\varphi^{-1}(\{0\}) = Ker(\varphi)$

$\hookrightarrow$ υποδακτύλιος χωρίς μονάδα

$\downarrow$ υποδακτύλιος χωρίς μονάδα του R

Απόδειξη: (2) $\varphi^{-1}(S') = \{x \in R \mid \varphi(x) \in S'\}$

Τότε • $\varphi(0_R) = 0_{R'} \in S' \Rightarrow 0_R \in \varphi^{-1}(S')$

• $\varphi(1_R) = 1_{R'} \in S' \Rightarrow 1_R \in \varphi^{-1}(S')$

Έστω $x, y \in \varphi^{-1}(S') \Rightarrow \varphi(x), \varphi(y) \in S'$. Επειδή

S' υποδακτύλιος του $R' \Rightarrow \varphi(x) + \varphi(y) \in S' \Rightarrow \varphi(x+y) \in S'$

και $\varphi(x) \cdot \varphi(y) \in S' \Rightarrow \varphi(x \cdot y) \in S'$

Από τα παραπάνω $\Rightarrow x+y \in \varphi^{-1}(S')$

$\Rightarrow x \cdot y \in \varphi^{-1}(S')$

Άρα, $\varphi^{-1}(S)$: υποδακτύλιος του R

Ορισμός: Αν $\varphi: R \to R'$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων

τότε $Im(\varphi) = \{\varphi(x) \in R' \mid x \in R\}$: εικόνα του φ και είναι υποδακτύλιος του R', ενώ $Ker(\varphi) = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0\}$: πυρήνας του φ και είναι υποδακτύλιος χωρίς μονάδα του R

Ορισμός: Ένας ομομορφισμός δακτυλίων $\varphi: R \to R'$ καλείται

(1) μονομορφισμός αν-ν φ: 1-1
(2) επιμορφισμός αν-ν : φ: επί
(3) ισομορφισμός αν-ν : φ: 1-1 και επί

Πρόταση: Έστω ότι $\varphi: R \to R'$ είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων τότε (1) φ: μονομορφισμός $\Leftrightarrow Ker(\varphi) = \{0_R\}$

(2) φ: επιμορφισμός $\Leftrightarrow Im(\varphi) = R'$

(3) φ: ισομορφισμός $\Leftrightarrow \exists$ ομομορφισμός δακτυλίων $g: R' \to R$ ώστε ~~$\varphi \circ g = g \circ \varphi$~~ $\varphi \circ g = Id_{R'}$ και $g \circ \varphi = Id_R$ (και τότε $g = \varphi^{-1}$)

Αν τώρα R και R' είναι δακτύλιοι θα γράφουμε ότι

$R \cong R' \Leftrightarrow \exists$ ισομορφισμοί $\varphi: R \to R'$

Πρόταση: Η σχέση ισομορφίας $\cong$ στην κλάση όλων των δακτυλίων είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη: • $\forall R$: δακτύλιος : $R \cong R$ αφού η ταυτοτική απεικόνιση $\varphi: R \to R$ ισομορφισμός δακτυλίων

• Αν $R \cong R'$ τότε $\exists$ ισομορφισμός δακτυλίων $\varphi: R \to R'$. Όμως $\varphi^{-1}: R' \to R$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων και άρα $R' \cong R$

• Αν (i) $R \cong R'$ και (ii) $R' \cong R''$

Από (i) $\Rightarrow \exists\, \varphi: R \to R'$
Από (ii) $\Rightarrow \exists\, g: R' \to R''$
} Τότε η $g \circ \varphi: R \to R''$ είναι 1-1 και επί ως σύνθεση απεικονίσεων που είναι 1-1 και επί

Ενώ επιπλέον η $g \circ \varphi$ είναι ομομορφισμός αφού:

• $(g \circ \varphi)(x+y) = g(\varphi(x)+\varphi(y)) = g(\varphi(x)) + g(\varphi(y))$

• $(g \circ \varphi)(x \cdot y) = g(\varphi(x) \cdot \varphi(y)) = g(\varphi(x)) \cdot g(\varphi(y))$

• $(g \circ \varphi)(1_R) = g(\varphi(1_R)) = g(1_{R'}) = 1_{R''}$

Όπως και στις ομάδες, οι ισόμορφοι δακτύλιοι έχουν τις ίδιες δομικές ιδιότητες.

Παράδειγμα: Σαν ομάδες (προσθετικές) $(\mathbb{C},+) \cong (\mathbb{R},+)$

Όμως οι δακτύλιοι $(\mathbb{C},+,\cdot)$ και $(\mathbb{R},+,\cdot)$ δεν είναι ισόμορφοι.

Έστω ότι υπάρχει ισομορφισμός $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Τότε $\varphi(i^2) = \varphi(i \cdot i) = \varphi(i)\cdot\varphi(i) \Rightarrow (\varphi(i))^2 = -\varphi(1) = -1$

όμως $\varphi(i^2) = \varphi(-1) = -\varphi(1)$ (άτοπο αφού $\varphi(i) \in \mathbb{R}$ και δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}: x^2 = -1$

Παράδειγμα: Είναι οι δακτύλιοι $\mathbb{C}$ και $M_2(\mathbb{R})$ ισόμορφοι;

Απάντηση: Ο δακτύλιος $\mathbb{C}$ δεν έχει διαιρέτες του 0 και ο $M_2(\mathbb{R})$ έχει διαιρέτες του 0.

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ τότε $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Αν $\mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{R})$ τότε έστω $\varphi: \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων τότε $0 = \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi^{-1}(A\cdot B)$

$= \varphi^{-1}(A) \cdot \varphi^{-1}(B)$

$\Rightarrow 0 = \underbrace{\varphi^{-1}(A)}_{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\in \mathbb{C}} \Rightarrow \varphi^{-1}(A) = 0$ ή $\varphi^{-1}(B) = 0$

$\Rightarrow A = 0$ ή $B = 0$, διότι φ^{-1}: ισομορφισμός δακτυλίων

(Άτοπο αφού $A \neq 0$ και $B \neq 0$)

Ψάχνουμε τώρα μονομορφισμός δακτυλίων

$\varphi: \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$, τότε $\varphi(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ είναι η κατάλληλη απεικόνιση

(1) $\varphi((a+ib)+(x+yi)) = \varphi((a+x)+i(b+y)) = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ -(b+y) & a+x \end{pmatrix}$

(2) $\varphi((a+ib)\cdot(x+yi)) = \varphi((ax-by)+(ay+bx)i) = \begin{pmatrix} ax-by & ay+bx \\ -(ay+bx) & ax-by \end{pmatrix}$

$\varphi(a+bi)\cdot\varphi(x+yi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-by & ay+bx \\ -(bx+ay) & ax-by \end{pmatrix}$

(3) $\varphi(1) = \varphi(1+0\cdot i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Άρα φ: ομομορφισμός δακτυλίων

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a+bi \in \mathbb{C} \mid \varphi(a+bi) = 0_{M_2(\mathbb{R})}\}$

$= \{a+bi \in \mathbb{C} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$

$= \{a+bi \in \mathbb{C} \mid a=b=0\} = \{0\}$. Άρα, φ: μονομορφισμός

Θέτουμε $S = \varphi(\mathbb{C}) = \mathrm{Im}(\varphi) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Τότε S: υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{R})$ και $\varphi: \mathbb{C} \to S$ είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

Έστω $\varphi: R \to R'$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε

$Ker(\varphi)$: υποδακτύλιος χωρίς μονάδα του R: $\forall x,y \in Ker(\varphi)$

: • $x-y \in Ker(\varphi)$
• $x \cdot y \in Ker(\varphi)$
• $0 \in Ker(\varphi)$

Αν $r \in R$, $x \in Ker(\varphi)$: $\varphi(r \cdot x) = \varphi(r) \cdot \cancel{\varphi(x)}^{0_{R'}} = 0_{R'}$

$\varphi(x \cdot r) = \varphi(x) \cdot \varphi(r) = 0_{R'}$

$\Rightarrow r \cdot x$ και $x \cdot r \in Ker(\varphi)$

Ορισμός: Ένα υποσύνολο I του R καλείται ιδεώδες του R $\Leftrightarrow$: • $0_R \in I$

• $\forall x,y \in I \Rightarrow x-y \in I$

$\Big\}\ I \leq (R,+)$

• $\forall x \in I$, $\forall r \in R$: $x \cdot r \in I$ και $r \cdot x \in I$

Παράδειγμα: (1) Ο πυρήνας $Ker(\varphi)$ ενός ομομορφισμού δακτυλίου είναι ιδεώδες

(2) Ποια είναι τα ιδεώδη του δακτυλίου των ακεραίων

Απάντηση: $n\mathbb{Z}$, $n = 0,1,2,\dots$

Αν I: ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ τότε $I \leq (\mathbb{Z},+)$

Αντίστροφα, αν $I \leq (\mathbb{Z},+)$. Επειδή, οι υποομάδες της $(\mathbb{Z},+)$ είναι οι εξής: $n\mathbb{Z}$, $n=0,1,2,\dots$

έπεται ότι $I = n\mathbb{Z}$, για κάποιο $n=0,1,2,\dots$

Για κάθε $x \in \mathbb{Z}$: $x\,nk = n(xk) \in n\mathbb{Z}$

$(\forall nk \in I = n\mathbb{Z})$

Άρα, $I = n\mathbb{Z}$: ιδεώδες του $\mathbb{Z}$

Υποομάδες της $(\mathbb{Z},+) \equiv$ Ιδεώδη του $\mathbb{Z}$

Παράδειγμα: $T_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a,b,d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$

Να δειχθούν: (i) Το $T_2(\mathbb{R})$ είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{R})$

(ii) Το σύνολο $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ είναι ιδεώδες του $T_2(\mathbb{R})$

(iii) Το I δεν είναι ιδεώδες του $M_2(\mathbb{R})$

Λύση: (i) • $0_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$

• $1_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$

• $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y + \beta z \\ 0 & \delta z \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$

• $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - x & \beta - y \\ 0 & \delta - z \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$

Από τα παραπάνω $\Rightarrow$ $T_2(\mathbb{R})$ υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{R})$

(ii) • $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$.

• $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x-y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$

• $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ και $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x\delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

Άρα, I ιδεώδες του $T_2(\mathbb{R})$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Τότε $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin I$

Άρα I δεν είναι ιδεώδες του $M_2(\mathbb{R})$

Έστω I: ιδεώδες του R. Τότε $I \leq (R,+)$: αβελιανή

$\Rightarrow I \trianglelefteq (R,+) \Rightarrow$ ορίζεται η ομάδα πηλίκο $(R/I,+)$

$R/I = \{[x]_\sim \subseteq R \mid x \in R\}$ όπου $[x]_\sim = x+I = \{x+r \in R \mid r \in R\}$

$x+I = y+I \Leftrightarrow x-y \in I$ και $(x+I)+(y+I) = (x+y)+I$

Σκοπός: Θέλουμε να δούμε πότε η $(x+I)\cdot(y+I) = (x\cdot y)+I$ είναι καλά ορισμένη. Θα δούμε ότι είναι καλά ορισμένη αν-ν I: ιδεώδες.